23:47 10月8日周六 59%
多元统计分析
实用回归分析 | 多元统计分析

# Ch2 多元正态分布及参数的估计

## §2.1 随机向量

**Def**: n个样品排为 n×p 矩阵: $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np}\end{pmatrix} = (X_1, X_2, \cdots X_n) = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix}$

**Def**: 联合分布函数: $F(x_1,\cdots x_p)=P\{X_1\le x_1, X_2\le x_2 \cdots X_p\le x_p\}$ （$X=(X_1,X_2\cdots X_p)'$ 为p维随机向量）

连续型随机向量: $\exists f(x_1,x_2\cdots x_p)\ge 0$, s.t. $F(x_1,x_2\cdots x_p)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_p} f(x_1,x_2\cdots x_p)dx_1\cdots dx_p$

（$f$：X的联合概率密度函数）

边缘分布有 $C_p^1+C_p^2+\cdots+C_p^{p-1}=2^p-2$ 个

计算 $(x_1,x_2,x_3)$ 中边缘分布 $F_{12}(x_1,x_2)=P(X_1\le x_1, X_2\le x_2, X_3\in R)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v,w)dw\right)dudv$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,w)dw$

条件分布 $X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}$，给定 $X^{(2)}$，称 $X^{(1)}$ 的分布为条件分布

$f_1(x^{(1)}|x^{(2)})=f(x^{(1)},x^{(2)})/f_2(x^{(2)})$

独立: $F(x_1\cdots x_p)=F_1(x_1)\cdots F_p(x_p)$ $\quad f(x_1\cdots x_p)=f_1(x_1)\cdots f_p(x_p)$（连续型）

### 数字特征

$E(X)=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ \vdots \\ E(X_p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_p\end{pmatrix}$

$\Sigma=D(X)=E[(X-E(X))(X-E(X))']=\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_p) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) & \cdots & Cov(X_2,X_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & Cov(X_p,X_2) & \cdots & Cov(X_p,X_p)\end{pmatrix}=(\sigma_{ij})_{p\times p}$ 对称非负定

$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))']=\begin{pmatrix} Cov(X_1,Y_1) & Cov(X_1,Y_2) & \cdots & Cov(X_1,Y_q) \\ Cov(X_2,Y_1) & Cov(X_2,Y_2) & \cdots & Cov(X_2,Y_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(X_p,Y_1) & Cov(X_p,Y_2) & \cdots & Cov(X_p,Y_q)\end{pmatrix}$ 若 $Cov(X,Y)=0$ 则 X,Y 不相关

相关阵 $R=(r_{ij})_{p\times p}$，$r_{ij}=\dfrac{Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\cdot\sqrt{Var(X_j)}}=\dfrac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$，（$Var(X_i)=Cov(X_i,X_i)\triangleq\sigma_{ii}$）

**Thm**: 1. X,Y 为随机向量, A,B 为常数矩阵

$E(AX)=AE(X)$，$E(AXB)=AE(X)B$，$D(AX)=AD(X)A'$，$Cov(AX,BY)=ACov(X,Y)B'$

$E(X'AX)=E(X)'AE(X)+tr(A\cdot Cov(X))$

$E(X'AX)=E[(X-E(X)+E(X))'A(X-E(X)+E(X))]$

$=E[(X-E(X))'A(X-E(X))]+E[(X-E(X))'AE(X)]+E[E(X)'A(X-E(X))]+E(X)'AE(X)$（中间两项 $=0$）

$=E[tr((X-E(X))'A(X-E(X)))]+E(X)'AE(X)$

$=E[tr(A(X-E(X))(X-E(X))')]+E(X)'AE(X)$

$=tr(ACov(X))+E(X)'AE(X)$

## §2.2 多元正态分布的定义和基本性质

**Def:** $U=(U_1\cdots U_q)'$ 为随机向量，$U_1\cdots U_q$ 相互独立且同 $N(0,1)$ 分布；

设 $\mu$ 为 $p$ 维常数向量，$A$ 为 $p\times q$ 常数矩阵，

则称 $X=AU+\mu$ 的分布为 $p$ 元正态分布，或称 $X$ 为 $p$ 维正态随机向量，记为 $X\sim N_p(\mu, AA')$

**Thm:** 设 $U=(U_1\cdots U_q)'$ 为随机向量，$U_1\cdots U_q$ 相互独立且同 $N(0,1)$ 分布；

令 $X=AU+\mu$，则 $X$ 的特征函数：$\phi_X(t)=\exp[it'\mu-\frac{1}{2}t'AA't]$

（一元）$\phi_X(t)=E(e^{itX})=\exp[it\mu-\frac{1}{2}t^2\sigma^2]$

$$E(e^{it'X})=E(e^{it'(AU+\mu)})=e^{it'\mu}\cdot E(e^{i(A't)'U})$$

$$=e^{it'\mu}\cdot E(\prod_{j=1}^{q}e^{is_ju_j})=e^{it'\mu}\cdot\prod_{j=1}^{q}E(e^{is_ju_j})=e^{it'\mu}\cdot\prod_{j=1}^{q}e^{is_j\cdot 0-\frac{1}{2}s_j^2}=\exp(it'\mu-\frac{1}{2}s's)=\exp(it'\mu-\frac{1}{2}t'A'At)$$

**Def:** 若 $p$ 维随机向量 $X$ 的特征函数为 $\phi_X(t)=\exp[it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t]$ $(\Sigma\geq 0)$

则称 $X$ 服从 $p$ 元正态分布，记为 $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$

**Thm:** 设 $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，$B$ 为 $s\times p$ 常数矩阵，$d$ 为 $s$ 维常向量，

令 $Z=BX+d$，则 $Z\sim N_s(B\mu+d, B\Sigma B')$

即：正态随机向量的任意线性组合仍服从正态分布

$\Rightarrow$ 设 $X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\p-r\end{matrix}\sim N_p(\mu,\Sigma)$，将 $\mu$ 写为 $\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\\mu^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\p-r\end{matrix}$，$\Sigma$ 写为 $\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\p-r\end{matrix}$（列：$r$, $p-r$）

则 $X^{(1)}\sim N_r(\mu^{(1)},\Sigma_{11})$　$X^{(2)}\sim N_{p-r}(\mu^{(2)},\Sigma_{22})$

**Thm:** 若 $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，则 $E(X)=\mu$，$D(X)=\Sigma$

**Thm:** 设 $X=(X_1,\cdots X_p)'$ 为 $p$ 维随机向量

则 $X$ 服从 $p$ 元正态分布 $\Leftrightarrow$ 对任一 $p$ 维实向量 $a$，$\xi=a'X$ 是一维正态随机变量

**Def:** 若 $p$ 维随机向量 $X$ 的任意线性组合均服从一元正态分布

则称 $X$ 为 $p$ 维正态随机向量

**Thm:** 设 $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$ 且 $\Sigma>0$（正定），则 $X$ 的联合密度函数为 $f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]$

**Def:** 若 $p$ 维随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots X_p)'$ 的联合密度函数为

$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]$，其中 $\mu$ 为 $p$ 维实向量，$\Sigma>0$ 时，

则称 $X$ 为 $p$ 维正态随机向量，$X\sim N_p(\mu,\Sigma)$

**Thm:** $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，$\Sigma>0$，则 $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\sim\chi^2(p)$

令 $\xi=X-\mu$，则 $\xi\sim N_p(0,\Sigma)$，$\eta=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\xi\sim N_p(0,I_p)$，$\eta'\eta\sim\chi^2(p)$

## §2.3 条件分布和独立性

**独立性**　**Thm:** $X^{(1)}$ 与 $X^{(2)}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\Sigma_{12}=0$

$X^{(1)}\cdots X^{(k)}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\Sigma_{ij}=0$

**条件分布**　**Thm:** 设 $X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\p-r\end{matrix}\sim N_p(\mu,\Sigma)$ $(\Sigma>0)$，

则当 $X^{(2)}$ 给定，$X^{(1)}$ 的条件分布为 $(X^{(1)}|X^{(2)})\sim N_r(\mu_{1\cdot2},\Sigma_{11\cdot2})$

条件期望：$E(X^{(1)}|X^{(2)})=\mu_{1\cdot2}=\mu^{(1)}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x^{(2)}-\mu^{(2)})$，$\Sigma_{11\cdot2}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\overset{记}{=}(\sigma_{ij\cdot r+1,\cdots,p})_{r\times r}$ $(i,j=1\cdots r)$

（$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$：回归系数 $B$）

偏相关系数：$r_{ij\cdot r+1,\cdots,p}=\frac{\sigma_{ij\cdot r+1,\cdots,p}}{\sqrt{\sigma_{ii\cdot r+1,\cdots,p}}\sqrt{\sigma_{jj\cdot r+1,\cdots,p}}}$

全相关系数：$R=\left(\frac{\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}}{\sigma_{yy}}\right)^{1/2}$

$Z=\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}\begin{matrix}p\\1\end{matrix}\sim N_{p+1}\left(\begin{pmatrix}\mu_x\\\mu_y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma_{xx}&\Sigma_{xy}\\\Sigma_{yx}&\sigma_{yy}\end{pmatrix}\right)$

## §2.4 随机阵的正态分布

**Def:** p元正态总体：$X=(x_{ij})_{n\times p}=(X_{(1)},X_{(2)}\cdots X_{(n)})_{n\times p}$　$X_{(i)}=(x_{i1}\cdots x_{ip})'$

$$Vec(X')=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\\\vdots\\X_{(n)}\end{pmatrix}_{np\times1}\sim N_{np}\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma&&\\&\Sigma&\\&&\ddots\\&&&\Sigma\end{pmatrix}\right)=N_{np}(1_n\otimes\mu,\ I_n\otimes\Sigma)$$

矩阵正态分布，记作 $X\sim N_{n\times p}(M,I_n\otimes\Sigma)$，$Vec(M')=1_n\otimes\mu$

**Thm:** $X\sim N_{n\times p}(M,I_n\otimes\Sigma)$，$Z=AXB'+D$，则 $Z\sim N(AMB'+D,(AA')\otimes(B\Sigma B'))$

## §2.5 多元正态分布的参数估计

### $\mu,\Sigma$ 的最大似然估计　相合性

样本均值向量：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p)'=\frac{1}{n}X'1_n$

样本离差阵：$A=\sum_{a=1}^{n}(X_{(a)}-\bar{X})(X_{(a)}-\bar{X})'\overset{(*)}{=}X'X-n\bar{X}\bar{X}'=X'[I_n-\frac{1}{n}1_n1_n']X\triangleq(a_{ij})_{p\times p}$

样本协方差阵：$S=\frac{1}{n}A$

样本相关阵：$R=(r_{ij})_{p\times p}$，$r_{ij}=\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}=\frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}}$

$(*)$: $\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}X_{(i)}'-X_{(i)}\bar{X}'-\bar{X}X_{(i)}'+\bar{X}\bar{X}')$

$=\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}X_{(i)}'-(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}}_{n\bar{X}})\bar{X}'-\bar{X}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}'}_{n\bar{X}'})+n\bar{X}\bar{X}'$

$=\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}X_{(i)}'-n\bar{X}\bar{X}'=X'X-n\bar{X}\bar{X}'$

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}=\frac{1_n'X}{n}$　　$X=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\\vdots\\X_{(n)}\end{pmatrix}_{n\times p}$

参数估计

$P(X_1=x_1,\cdots X_n=x_n)$

$\to P(x_1\le X_1\le x_1+dx_1,\cdots x_n\le X_n\le x_n+dx_n)$

$=\prod_{i=1}^{n}P(x_i\le X_i\le x_i+dx_i)$

$=\prod_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_i+dx_i}f(x)dx=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)dx_i=(\prod_{i=1}^{n}f(x_i))(\prod_{i=1}^{n}dx_i)\to\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

### 似然函数 $L(\mu,\Sigma)$

1. 似然函数 $L(\mu,\Sigma)$

把随机数据阵 $X$ 按行拉直后形成的 $np$ 维长向量 $\mathrm{Vec}(X')$ 的联合密度函数看成未知参数 $\mu,\Sigma$ 的函数，并称为样本 $X_{(i)}(i=1,\cdots,n)$ 的似然函数，记为 $L(\mu,\Sigma)$：

$$\begin{aligned}L(\mu,\Sigma)&=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x_{(i)}-\mu)'\Sigma^{-1}(x_{(i)}-\mu)\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\mu)'\Sigma^{-1}(x_{(i)}-\mu)\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}((x_{(i)}-\mu)'\Sigma^{-1}(x_{(i)}-\mu))\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}(x_{(i)}-\mu)(x_{(i)}-\mu)')\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\left[\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\mu)(x_{(i)}-\mu)'\right)\right]\\&\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\mu)(x_{(i)}-\mu)'\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\mu)(x_{(i)}-\mu)'\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\bar{X}+\bar{X}-\mu)(x_{(i)}-\bar{X}+\bar{X}-\mu)'\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\bar{X})(x_{(i)}-\bar{X})'+n(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu)'\\&=A+n(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu)'.\end{aligned}$$

由于 $\ln x$ 是 $x$ 的单调函数，$L(\mu,\Sigma)$ 与 $\ln L(\mu,\Sigma)$ 有相同的最大值点。以下只须讨论 $\ln L(\mu,\Sigma)$ 的最大值问题。

$$\begin{aligned}\ln L(\mu,\Sigma)&=-\frac{np}{2}\ln2\pi-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|\\&\quad-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\mu)(x_{(i)}-\mu)'\right]\\&=C-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma^{-1}A+n\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu)']\\&=C-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}A)-\frac{n}{2}[(\bar{X}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu)]\\&\le C-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}A).\end{aligned}$$

以上不等式仅当 $\mu=\bar{X}$ 时等号成立，即对于固定的 $\Sigma>0$，有

$$\ln L(\bar{X},\Sigma)=\max_{\mu}\ln L(\mu,\Sigma).$$

$\Sigma$: $\max_{\mu,\Sigma>0}L(\mu,\Sigma)=\max_{\Sigma>0}L(\bar{X},\Sigma)$

$L(\bar{X},\Sigma)=(2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}e^{-\frac{1}{2}(tr(A\Sigma^{-1}))}$

$=(2\pi)^{-np/2}|A|^{-\frac{n}{2}}|A\Sigma^{-1}|^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}(tr(A\Sigma^{-1}))}$

$=|\Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{-\frac{1}{2}}|^{\frac{n}{2}}\cdot\exp\{\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{-\frac{1}{2}})\}$

$\Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{-\frac{1}{2}}=nI$ 时

$\hat{\Sigma}=\frac{A}{n}$ 时，取max

引理：$A$ 为正定阵，$f(A)=C|A|^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}tr(A)}$

$f(A)$ 在 $A=nI$ 时达到max

△看课本

# 最大似估计量的性质

设 $X_{(i)}=(x_{i1}\cdots x_{ip})'\ (i=1\cdots n)$ iid $\sim N_p(\mu,\Sigma)$，且 $\Sigma>0$

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}=\frac{1}{n}X_n' 1_n \quad A=\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\bar{X})(X_{(i)}-\bar{X})'=X'(I_n-\frac{1_n 1_n'}{n})X$

**Thm:** (1) $\bar{X}\sim N_p(\mu,\frac{1}{n}\Sigma)$　矩阵正态分布的线性变换仍服从矩阵正态分布

(2) $A\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{n-1}Z_iZ_i'$，其中 $Z_1\cdots Z_{n-1}$ iid $\sim N_p(0,\Sigma)$

(3) $\bar{X}$ 与 $A$ 相互独立

(4) $P\{A>0\}=1 \Leftrightarrow n>p$

(2)
$Z=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{(n-1)1} & \cdots & r_{(n-1)n} \\ 1/\sqrt{n} & \cdots & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}X$　（n阶正交）

$A=\sum_{i=1}^{n}X_iX_i'-n\bar{X}\bar{X}'$

$=\sum_{i=1}^{n}Z_iZ_i'-Z_nZ_n'=\sum_{i=1}^{n-1}Z_iZ_i'$

$E(Z_i)=E\left((X_1\cdots X_n)\begin{pmatrix} r_{i1}\\ \vdots \\ r_{in}\end{pmatrix}\right)$

$=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}E(X_j)=\begin{cases}0, & t\neq n\\ \sqrt{n}\mu, & t=n\end{cases}$

(3) $\{Z_1\cdots Z_{n-1}\}$ 与 $Z_n$ 独立（$\uparrow A$，$\uparrow \bar{X}$）

(4) $\underset{p\times(n-1)}{B}=(Z_1\cdots Z_{n-1})$，$A=BB'$，$rank(A)=rank(B)=p<n$

P元正态 $N_p(\mu,\Sigma)$：
待估参数有 $\frac{1}{2}p(p+1)+p$ 个

$\Leftarrow$ 只需 $P\{B$ 的前 $p$ 列线性相关$\}=0$

$P\{B$的前$p$列线性相关$\}=P\{Z_1\cdots Z_p$ 线性相关$\}$
$\leq\sum_{i=1}^{p}P\{Z_i$ 可表示成 $Z_1\cdots Z_{i-1},Z_{i+1}\cdots Z_p$ 的线性组合$\}$
$=p\cdot P\{Z_1=\sum_{i=2}^{p}k_iZ_i\}$
$=p\cdot P\{Z_1Z_1'=(\sum_{i=2}^{p}k_iZ_i)Z_1'\}$
$=p\cdot P\{\underbrace{E(Z_1Z_1')}_{\Sigma}=\underbrace{E((\sum_{i=2}^{p}k_iZ_i)Z_1')}_{0}\}=0$

1、$\bar{X}$ 为 $\mu$ 的无偏估计　$E(\bar{X})=\mu$　强相合　$P\{\lim_n \bar{X}=\mu\}=1$

$\hat{\Sigma}=\frac{1}{n}A$ 为 $\Sigma$ 的有偏估计（渐近无偏）but 强相合　$E(\frac{A}{n})=\frac{n-1}{n}E(\frac{A}{n-1})$　$P\{\lim_n \hat{\Sigma}=\Sigma\}=1$

$S=\frac{1}{n-1}A$ 为 $\Sigma$ 的无偏估计　$E(\frac{A}{n-1})=\Sigma$　强相合

2、$(\bar{X},\hat{\Sigma})$ 是 $(\mu,\Sigma)$ 的充分统计量　（因子分解定理）查！

$\Sigma$ 已知时，$\bar{X}$ 为 $\mu$ 的充分统计量

$\mu$ 已知时，$\hat{\Sigma}$ 为 $\Sigma$ 的充分统计量

3、$(\bar{X},\hat{\Sigma})$ 是 $(\mu,\Sigma)$ 的完备统计量

4、$(\bar{X},\frac{1}{n-1}S)$ 是 $(\mu,\Sigma)$ 的有效估计　（C-R不等式）查！